3ème Maths : M2
Date : le 24 / 02 / 2009
Coefficient : 4

Devoir de Maison N°2
Mathématiques

Exercice 1 :

I – On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 4 = 0$.

1) Vérifier que $1 + i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation.

2) En déduire l'autre solution.

II – Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit I, M et K les points d'affixes respectives : $z_I = 1 + i\sqrt{3}$, $z_M = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_K = 2i$.

1) Déterminer le module et un argument de z_M

2) a – La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M en A. Montrer que : $z_A = \sqrt{3} + i$.

b – On appelle C le symétrique de A par rapport à K. Déterminer z_C affixe du point C.

c – Déterminer l'affixe du point B, image de M par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

d – Déterminer l'affixe du point D, image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + 2i$.

3) Démontrer que K est le milieu de $[DB]$.

4) Soit le nombre complexe $Z = \frac{z_D - z_K}{z_A - z_K}$

a – Donner l'interpréter géométriquement du module et de l'argument de Z.

b – Vérifier que $Z = -i$

c – Montrer que $ABCD$ est un carré.

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2Cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g(x) = 2Sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$.

On désigne par C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g.

1) a – Montrer que la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de C_f et que le point $A\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

b – Déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c – Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur I.

d – Construire, sur le graphique (page annexe), C_1 la partie de C_f relative à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, 3\pi\right]$

2) a – Montrer que pour tout réel x on a : $g\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$.

b – En déduire que C_g est l'image de C_f par une translation t dont on précisera le vecteur $\vec{u}$.

c – Tracer alors $C_2 = t_{\vec{u}}(C_1)$.

3) Soit la fonction h définie sur $[0,2\pi]$ par : $h(x)=|Cosx|+\sqrt{3}|Sinx|$.

a – Exprimer h en fonction de f ou g sur chacun des intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

b – Tracer alors la représentation graphique de h dans le même repère en utilisant C_1 et C_2.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{g(x)+\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{2}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)+g(x)}{2x-\pi}$

Exercice 3 :

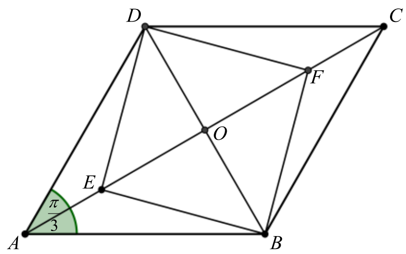
$ABCD$ est un losange tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $EBFD$ est un carré de sens direct

1) Soit r la rotation de centre B d'angle $\frac{-\pi}{3}$

a – Déterminer $r(A)$

b – Construire $E'=r(E)$ et $F'=r(F)$

c – Montrer que D, E', F' sont alignés.



2) Montrer que $BE'CF'$ est un carré.

3) Montrer que $BD=E'F'$.

4) soit $G\in[DE]$ et $H\in[EB]$ tel que $DG=EH$

On pose O le centre du carré $EBFD$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a – Quelle est l'image du segment $[DE]$ par R ?

b – Montrer que $R(G)=H$.

c – Déduire que $(FG)\perp(DH)$.

Problème :

I – On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}-1$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (*unité 2cm*).

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$. Interpréter graphiquement.

b – Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a – Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout $x\in IR$, $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

b – Dresser le tableau de variation de f.

3) a – Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisses 0.

b – Etudier la position relative de C_f par rapport à T.

c – Tracer T et C_f.

II – Soit la suite (u_n), définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{-1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) a – Démontrer que, pour tout $n \in IN$, on a $-1 \leq u_n \leq -\dfrac{1}{2}$.

b – Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a – Montrer que, pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} + 1 \leq \dfrac{2}{\sqrt{5}}(1 + u_n)$

b – En déduire que, pour tout $n \in IN$, $u_n + 1 \leq \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$

c – Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) On considère pour tout $n \in IN$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^k$.

a – Exprimer S_n en fonction de n.

b – Trouver un encadrement de $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} u_n$